

# Efekt Casimira

M. W. Kalinowski

E-mail: m.kalinowski@imdik.pan.pl

18 czerwca 2014

Efekt Casimira polega na obserwowalnych siłach między materialnymi ciałami dzięki zerowym fluktuacjom pól kwantowych. Mogą to być pola skalarne, elektromagnetyczne, fermionowe i in. W praktyce chodzi oczywiście o pole elektromagnetyczne. Jest oczywiście związek między efektem Casimira i siłami van der Waalsa. Efekt Casimira występuje między ciałami przewodzącymi prąd elektryczny oraz izolatorami (dielektrykami). W fizyce mamy także efekt Casimira związany z fluktuacjami termicznymi (niekwantowymi) oraz akustyczny odpowiednik efektu Casimira. Wszystkie te efekty zostały zaobserwowane w szeregu różnych eksperymentów. Mamy również odpowiednik efektu Casimira dla fal na morzu.

Najprostszy przypadek to przyciąganie się dwóch nieskończonych, doskonale przewodzących płyt (przypadek najtrudniejszy do obserwacji ze względów technicznych). Wynik można otrzymać wieloma metodami kwantowej teorii pola i wynosi on (siła na jednostkę powierzchni)

$$f = -\frac{\pi^2}{240} \cdot \frac{1}{a^4}, \quad (1)$$

gdzie  $a$  jest odległością między płytami.

Interesującą rzeczą jest wspomnieć, że możemy ten wynik otrzymać, stosując uogólnione funkcje Colombeau, w sposób wyjątkowo elegancki, nie stosując żadnej z metod regularyzacji kwantowej teorii pola (tj. regularyzacji wymiarowej, regularyzacji za pomocą funkcji  $\zeta$  itd.). Wynika stąd jasno (co było już wcześniej spostrzegane), że kłopoty kwantowej teorii pola z tzw. nieskończonościami wynikają z tego, że nie ma ogólnej teorii iloczynu dystrybucji Schwartza. W przypadkach uogólnionych funkcji Colombeau taki iloczyn zawsze istnieje, a przestrzeń dystrybucji Schwartza jest zanurzalna w sposób kanoniczny w przestrzeni uogólnionych funkcji Colombeau. Warto zauważyć, że funkcje uogólnione Colombeau są równocześnie pewnym uogólnieniem dystrybucji Schwartza oraz pewnej wersji polskiej teorii dystrybucji (Sikorskiego, Mikusińskiego, Antosika). Ciągowa teoria dystrybucji (tj. polska) w zastosowaniu Colombeau w miejscu  $\varphi_n(x)$  (ciągu funkcji gładkich) używa funkcji  $\varphi(x, \varepsilon)$ , gdzie w miejscu  $n$  (lub  $\frac{1}{n}$ ) mamy dowolny  $\varepsilon \in (0, 1)$ .

J. F. Colombeau wprowadza algebrę *fonctionelles modérées* i ideał w tej algebrze *fonctionelles nulles*. Iloraz algebry przez ideał daje klasę funkcji uogólnionych. Istnieje kilka równoważnych podejść.

Efekt Casimira może być zarówno przyciągający, jak i odpychający. Np. efekt Casimira dla doskonale przewodzącej kuli jest odpychający. Udało się potwierdzić eksperymentalnie efekt Casimira np. układu doskonale przewodzącej (w przybliżeniu oczywiście) kuli i płaszczyzny. Efekt Casimira jest źródłem bardzo specjalnego typu energii (egzotycznej energii). Energia ta, jeśli produkowana jest w ilościach przemysłowych, może służyć do zrealizowania budowy „worm holes”, czyli dziur wygryzionych przez robaki. Są to tzw. tunele czasoprzestrzenne, łączące odległe

obszary Wszechświata, a nawet służące do podróży w czasie. Energia ta może być również użyta jako ciemna energia (stała kosmologiczna).

W biofizyce efekt Casimira doskonale nadaje się do stabilizacji błon (membran) biologicznych. Równocześnie efekt Casimira może mieć istotne zastosowanie w kinetyce reakcji chemicznych (biochemicznych), tzw. chemia Casimira. Warto również stwierdzić, że efekt Casimira nie spełnił pewnych pokładanych w nim nadziei. Z uwagi na to, że efekt Casimira jest odpychający (nie jest przyciągający) dla sfery, nie może być przyczyną stabilności klasycznego modelu elektronu (naładowanej kuli). Efekt Casimira (związany ze skompaktyfikowanymi wyższymi wymiarami) miał być możliwością zbadania istnienia tych wymiarów. Nadzieja ta okazała się płonna.

Termodynamiczny efekt Casimira związany z fluktuacjami termicznymi około temperatury krytycznej został potwierdzony doświadczalnie i znalazł zastosowania praktyczne. Akustyczny efekt Casimira stał się źródłem nowej generacji czujników hałasu. Interesującą rzeczą jest połączenie kwantowego efektu Casimira i termodynamicznego efektu Casimira, tj. efektu Casimira w skończonej (niezerowej) temperaturze. Tego rodzaju efekt Casimira ma wyjątkową przyszłość w biologii molekularnej. Z uwagi na to, że istnieje akustyka kwantowa, możemy również spodziewać się kwantowo-akustycznego efektu Casimira.

Wydaje się, że efekt Casimira będzie miał istotne znaczenie w nanotechnologii, a także w biologii molekularnej. W tym ostatnim przypadku będzie to istotne dla oddziaływania makromolekuł, które możemy traktować jako dwa dielektryki o zadanym kształcie. Energię oddziaływania Casimira możemy zapisać

$$E_{12} = -\frac{23}{(4\pi)^3} \int_{W_1 \times W_2} d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2 \frac{(\varepsilon_1 - 1)(\varepsilon_2 - 1)}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^7} = -\frac{23}{(4\pi)^3} (\varepsilon_1 - 1)(\varepsilon_2 - 1)I_{12}. \quad (2)$$

$W_1$  i  $W_2$  mają kształty makromolekuł i mogą być wzięte z baz danych,  $\varepsilon_i$ ,  $i = 1, 2$ , są stałymi dielektrycznymi makromolekuł i mogą być obliczone metodami chemii kwantowej.

Z każdym zbiorem  $W_i$ ,  $i = 1, 2$ , wiążemy jego naturalny układ współrzędnych o początku w środku ciężkości i osiach skierowanych w kierunkach głównych jego centralnej elipsoidy bezwładności.

Współrzędne środków ciężkości dane są wzorami

$$x_{Ci} = \frac{\int_{W_i} x d^3\vec{r}}{\int_{W_i} d^3\vec{r}}, \quad y_{Ci} = \frac{\int_{W_i} y d^3\vec{r}}{\int_{W_i} d^3\vec{r}}, \quad z_{Ci} = \frac{\int_{W_i} z d^3\vec{r}}{\int_{W_i} d^3\vec{r}}, \quad i = 1, 2. \quad (3)$$

W układzie współrzędnych kartezjańskich o środku  $(x_{Ci}, y_{Ci}, z_{Ci})$ ,  $i = 1, 2$ , obliczamy następujące wyrażenia:

$$\begin{aligned} I_{xx}^i &= \int_{W_i} d^3\vec{r}(y^2 + z^2), & I_{yy}^i &= \int_{W_i} d^3\vec{r}(z^2 + x^2), & I_{zz}^i &= \int_{W_i} d^3\vec{r}(x^2 + y^2), \\ I_{yz}^i &= I_{zy}^i = \int_{W_i} d^3\vec{r}yz, & I_{zx}^i &= I_{xz}^i = \int_{W_i} d^3\vec{r}xz, & I_{xy}^i &= I_{yx}^i = \int_{W_i} d^3\vec{r}xy. \end{aligned} \quad (4)$$

Tworzymy równanie następujących powierzchni:

$$I_{xx}^i x^2 + I_{yy}^i y^2 + I_{zz}^i z^2 - 2I_{yz}^i yz - 2I_{xz}^i zx - 2I_{xy}^i xy = 1. \quad (5)$$

Są to równania elipsoidy ( $i = 1, 2$ ). Znajdujemy układ, w którym równanie ma postać

$$\tilde{I}_{xx}^i x^2 + \tilde{I}_{yy}^i y^2 + \tilde{I}_{zz}^i z^2 = 1. \quad (6)$$

Ten układ współrzędnych tworzą kierunki głównych osi powyższej powierzchni. Można tego dokonać przeprowadzając transformację ortogonalną (trójwymiarową). Technicznie sprowadza się to do następujących operacji.

Utworzymy macierz

$$I^i = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} I_{xx}^i & -I_{xy}^i & -I_{xz}^i \\ -I_{xy}^i & I_{yy}^i & -I_{yz}^i \\ -I_{xz}^i & -I_{yz}^i & I_{zz}^i \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}, \quad i = 1, 2. \quad (7)$$

Macierz  $I^i$  jest symetryczna,  $(I^i)^T = I^i$ . Rozwiązujemy równanie sekularne

$$\det|I_{kj}^i - \lambda\delta_{kj}| = 0 \quad (8)$$

i szukamy wektorów własnych. Kierunki wektorów własnych dadzą nam kierunki osi szukanego układu współrzędnych. Operację tę można wykonać, używając standardowych operacji, np. w *Mathematica*.

W ten sposób z każdym zbiorem  $W_i$ ,  $i = 1, 2$ , mamy związany naturalny układ współrzędnych

$$\begin{aligned} \vec{r}_2 &= \vec{r}_{02} + A_2 \vec{r}'_2 \\ \vec{r}_1 &= \vec{r}_{01} + A_1 \vec{r}'_1, \end{aligned} \quad (9)$$

$A_1, A_2$  — macierze ortogonalne,

$$A_i^{-1} = A_i^T, \quad i = 1, 2.$$

Zatem mamy

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = A_1 [A_1^{-1}(\vec{r}_{02} - \vec{r}_{01}) + A_1^{-1}A_2\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1], \quad (10)$$

czyli

$$\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\| = \|A_1^{-1}(\vec{r}_{02} - \vec{r}_{01}) + A_1^{-1}A_2\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1\| \quad (11)$$

( $A_1$  jest ortogonalne, mamy więc izometrię).

Niech

$$\vec{r}_0 = A_1^{-1}(\vec{r}_{02} - \vec{r}_{01}), \quad A_1^{-1}A_2 = A, \quad (12)$$

$A^{-1} = A^T$  (jest również ortogonalne)

$$\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\| = \|\vec{r}_0 + A\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1\| \quad (13)$$

$$\vec{r}'_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad \text{itp.} \quad (14)$$

Zatem mamy

$$I_{12} = \int_{W_1} \int_{W_2} \frac{d^3\vec{r}'_1 d^3\vec{r}'_2}{\|\vec{r}_0 + A\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1\|^7} = I_{12}(\vec{r}_0, A) \quad (15)$$

(mamy przekształcenie do nowych współrzędnych — od  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  do  $\vec{r}'_1, \vec{r}'_2$ , ale jacobian przekształcenia jest równy 1).

Oba całkowania są przeprowadzone w naturalnych układach współrzędnych dla  $W_1$  i  $W_2$ . Całka  $I_{12}$  jest w ten sposób funkcją  $\vec{r}_0$  i  $A$ , tj. przesunięcia między środkami ciężkości  $W_1$  i  $W_2$

oraz wzajemnej orientacji ich elipsoid bezwładności. Należy policzyć  $I_{12}$  dla danych makromolekuł wiele razy dla różnych  $\vec{r}_0$  i  $A$ .  $A$  można sparametryzować za pomocą trzech parametrów — kątów. Zawsze musimy mieć warunek  $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ .

W ten sposób otrzymamy  $E_{12}$  w zależności od wzajemnego położenia makromolekuł.

Występujące tu całkowania należy wykonać numerycznie, stosując dowolne metody całkowania numerycznego. Mamy tutaj do czynienia z całkowaniami w  $\mathbb{R}^3$  i  $\mathbb{R}^6$  (obliczanie położenia środków ciężkości i elementów macierzy  $I$ , tj.  $2(3+6) = 18$  całek w  $\mathbb{R}^3$ , oraz jedna w  $\mathbb{R}^6$ , która musi być obliczona wielokrotnie dla wielu  $\vec{r}_0$  i  $A$ ). W przypadku gdy  $\varepsilon_i$ ,  $i = 1, 2$ , są kawałkami stałe, należy zapisać  $W_i$ ,  $i = 1, 2$ , jako sumę teoriiomnościową

$$W_i = \bigcup_{j=1}^{k_i} W_{ij}, \quad W_{ij} \cap W_{kl} = \emptyset \quad \text{dla co najmniej jednego różnego wskaźnika } i, j, k, l, \quad (16)$$

$$\varepsilon_i(\vec{r}'_i) = \varepsilon_i^j, \quad \vec{r}'_i \in W_{ij}. \quad (17)$$

Zatem w tym wypadku

$$\tilde{I}_{12} = \sum_{j=1}^{k_1} \sum_{l=1}^{k_2} (\varepsilon_i^j - 1)(\varepsilon_k^l - 1) \int_{W_{1j}} \int_{W_{2l}} \frac{d^3 \vec{r}'_1 d^3 \vec{r}'_2}{\|r_0 + A\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1\|^7}. \quad (18)$$

Wtedy obliczamy całkę

$$I_{12}^{jl} = \int_{W_{1j}} \int_{W_{2l}} \frac{d^3 \vec{r}'_1 d^3 \vec{r}'_2}{\|r_0 + A\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1\|^7}. \quad (19)$$

Zastanówmy się nad rzędami występujących tu wielkości, w szczególności nad porównaniem  $E_{12}$  do energii ruchu cieplnego. Mamy

$$E_{12} = \frac{23\hbar c}{(4\pi)^3} (\varepsilon_1 - 1)(\varepsilon_2 - 1) I_{12} \quad (20)$$

oraz

$$\varepsilon_i - 1 \sim 1. \quad (21)$$

Niech  $T = 273^\circ + 25^\circ$  (temperatura pokojowa),

$$k_B T = 4.116 \cdot 10^{-21} \text{ J}. \quad (22)$$

Zauważmy, że dla interesujących nas zakresów mamy

$$\int d^3 \vec{r} d^3 \vec{r}' \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^7} \sim \frac{1}{\text{nm}} \quad (23)$$

(1 nm =  $10^{-9}$  m).

Zatem

$$\frac{|E_{12}|}{k_B T} \simeq 360. \quad (24)$$

To wskazuje, że warto zająć się tym problemem, tj. oddziaływaniem Casimira między makromolekułami.

Kwantowy efekt Casimira bazuje na rozkładzie pola (np. elektromagnetycznego) na oscylatory. Po skwantowaniu oscylatorów otrzymujemy energię  $\frac{1}{2} \hbar \omega_i$  na każdy oscylator. Jest to energia zerowa. W kwantowej teorii pola energia ta daje nieskończony wkład i musi być usunięta np. za pomocą odjęcia albo uporządkowania normalnego. Tak jest w przypadku  $\mathbb{R}^3$ . W przypadku gdy

część przestrzeni zostaje usunięta z rozważań z powodów topologicznych lub warunków brzegowych, wymagana jest duża ostrożność w rachunkach i energia zerowa nie może być po prostu zignorowana, stąd dodatkowa energia, a także ciśnienie i siły. Energia zerowa oscylatorów harmonicznycy pojawia się w mechanice kwantowej, nie ma jej w starej teorii kwantów. Powinno się ją uwzględnić także w przypadku kwantowych oscylatorów związanych z drganiami molekuly jako całości. Ma to wpływ na kwantową dynamikę molekularną, a więc także na biologię i medycynę molekularną. Pozostałe efekty Casimira bazują na pewnej asymetrii warunków początkowych odpowiednich pól klasycznych, z czym związane są np. fluktuacje termiczne lub przestrzenne pewnych modów akustycznych lub hydrodynamicznych. To może prowadzić do pojawiania dodatkowych ciśnień lub sił. Nie ma to jednak żadnego związku z teorią kwantową. Zauważmy jeszcze, że w przypadku kwantowo-mechanicznego efektu Casimira jest możliwe wprowadzenie poprawek promienistych np. do wzoru (1).

## Literatura

- [1] Bordag M., Mohideen U., Mostepanenko V. M., *New developments in the Casimir effect*, Phys. Rep. **363** (2001), p. 1.
- [2] Casimir H. B. G., *On the attraction between two perfectly conducting plates*, Proc. Kon. Nederland. Akad. Wetensch. **B51** (1948), p. 793.
- [3] Casimir H. B. G., Polder D., *The influence of retardation on the London–van der Waals forces*, Phys. Rev. **73** (1948), p. 360.
- [4] Charpentier E., *Sur l'élimination des "infinis" en théorie quantique des champs: la régularisation zeta à l'épreuve de l'interprétation de Colombeau ou vice versa*, Dissertationes Mathematicae (Rozprawy Matematyczne) **CCCLXXXIII**, Warszawa 1999.
- [5] Denardo B. C., Puda J. J., Laraza A. S., *A water wave analog of the Casimir effect*, American Journal of Physics **77** (2009), p. 1095.
- [6] Dzyabshinski I. E., Lifshitz E. M., Pitaevski L. P., *The general theory of van der Waals forces*, Advances in Physics **10**, p. 165.
- [7] Lamoreaux S. K., *Demonstration of the Casimir force in the 0.6 to 6  $\mu\text{m}$  range*, Phys. Rev. Lett. **78** (1997), p. 5.
- [8] Laraza A. S., Denardo B., *An acoustic Casimir effect*, Phys. Lett. **A248** (1998), p. 151.
- [9] Milton K. A., *The Casimir Effect*, World Scientific, Singapore 2001.
- [10] Nesterenko V. V., Lambiase G., Scarpetta G., *Calculation of the Casimir energy at zero and finite temperature. Some recent results*, Riv. Nuovo Cim. **27N6** (2004), p. 1.
- [11] Pawłowski P. H., Zielenkiewicz P., *The quantum Casimir effect may be a universal force organizing the bilayer structure of the cell membrane*, J. Membrane Biol. **246** (2013), p. 383.
- [12] Sheehan D. P., *Casimir Chemistry*, J. Chem. Phys. **131** (2009), id. 10476.